問１：　△ＡＢＣとそれに外接する円Ｏについて、半径をＲ、ＢＣ＝a、ＣＡ＝b、ＡＢ＝c とする。

(i)0＜∠Ａ＜90°である時

ＢＤ＝2Ｒとなるような点Ｄを円周上にとる。この時、円周角の定理より

∠ＢＣＤ＝90°、∠Ｄ＝∠Ａだから、

$\sin D = \sin A = \frac{a}{2R}$

これを変形すると、$\frac{a}{\sin A} = 2R$

他の角でも同様である。

(ii)∠Ａ＝90°の時、

sinＡ＝1、a＝2Ｒだから

$\frac{a}{\sin A} = 2R$

他の角でも同様である。

(iii)90°＜∠Ａ＜180°の時、ＢＤ＝2Ｒとなるような点Ｄを円周上にとる。この時、∠Ｄは∠Ａの対角だから

∠Ｄ＝180°－∠Ａ

よって、$\sin D = \sin A = \frac{a}{2R}$だから

$\frac{a}{\sin A} = 2R$

他の角でも同様である。

問２：△ＡＢＣについて、ＢＣ＝a、ＣＡ＝b、ＡＢ＝c とする。また、ＡからＢＣに垂線を下ろし、交点をＨとする。

(i)∠Ｂが鋭角の時

ＡＨ＝ｃ＊sinＢ

ＢＨ＝ｃ＊cosＢ

ＣＨ＝ＢＣ－ＢＨ＝a－ｃ＊cosＢ

三平方の定理より、

$b^2 = (a - c * \cos B)2 + (c * \sin B)2 = a^2 + c^2 - 2ac * \cos B$

(ii)∠Ｂが直角の時、(i)より

$b^2 = (a - c * \cos 90°)2 + (c * \sin 90°)2 = a2 + c^2 - 2ac * \cos 90° = a^2 + c^2$

(iii)∠Ｂが鈍角の時

ＡＨ＝ｃ＊sin(180°－∠Ｂ)＝ｃ＊sinＢ

ＢＨ＝ｃ $*\cos(180°-\angle B)=-c*\cos B$
ＣＨ＝ＢＨ＋ＢＣ＝－ｃ $*\cos B+a$
三平方の定理より
$b^2=(c*\sin B)2+(-c*\cos B+a)2=a^2+c^2-2ac*\cos B$

問３：17 個の玉から８個を選ぶのは
17Ｃ8＝24310 通り
これを円になるように並べるからその組み合わせは
(8－1)!＝5040 通り
ゆえに、求める組み合わせは
$24310*5040=122522400$通りである。

＊別解
円順列はぐるぐる回すと同じものになる組み合わせがあり、玉を８個使う今回は同じものが８通りできる。ゆえに、

$\frac{17\mathrm{P}8}{8}=122522400$通りである。

問４：(1)$3\mathrm{C}2*\left(\frac{3}{11}\right)^2*\left(\frac{8}{11}\right)=\frac{216}{1331}$

(2)$1-\left(\frac{3}{11}\right)4=1-\left(\frac{81}{14641}\right)=\frac{14560}{14641}$

(3)取り出す回数が１回の期待値は$\frac{3}{11}$回である。

取り出す回数が２回の期待値は$\left(\frac{9}{121}\right)*2+\left(\frac{48}{121}\right)*1=\frac{66}{121}=\frac{6}{11}$である。

３回の期待値は$\left(\frac{27}{1331}\right)*3+\left(\frac{216}{1331}\right)*2+\left(\frac{576}{1331}\right)=\frac{9}{11}$

４回の期待値は$\left(\frac{81}{14641}\right)*4+\left(\frac{864}{14641}\right)*3+\left(\frac{3456}{14641}\right)*2+\left(\frac{6144}{14641}\right)=\frac{12}{11}$

よって、赤い玉を取り出す期待値が１回をこえるには最低４回取り出せばよい。

問５：(i)図において、円周角より

∠ＢＡＣ=∠ＢＤＣ

∠ＡＣＤ=∠ＡＢＤ

二角相等で

△ＡＣＰ∽△ＤＢＰ

よって

ＰＡ:ＰＣ=ＰＤ:ＰＢ

ゆえに

ＰＡ・ＰＢ=ＰＣ・ＰＤ

(ii)図において、円に内接する四角形の内対角より、

∠ＰＡＣ=∠ＰＤＢ

∠ＰＣＡ=∠ＰＢＤ

二角相等で

△ＰＡＣ∽△ＰＤＢ

よって

ＰＡ:ＰＣ=ＰＤ:ＰＢ

ゆえに

ＰＡ・ＰＢ=ＰＣ・ＰＤ

(iii)図において、接弦定理より、

∠ＰＴＡ=∠ＰＢＴ

また、共通の角で

∠ＴＰＡ=∠ＢＰＴ

二角相等で

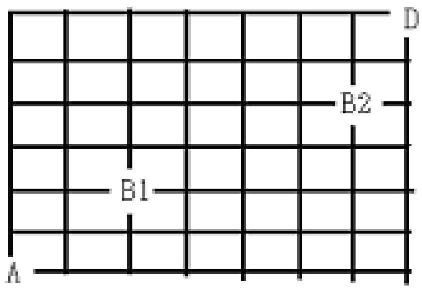
△ＴＰＡ∽△ＢＰＴ

よって

ＰＴ:ＰＡ=ＰＢ:ＰＴ

ゆえに

ＰＴ^2=ＰＡ・ＰＢ



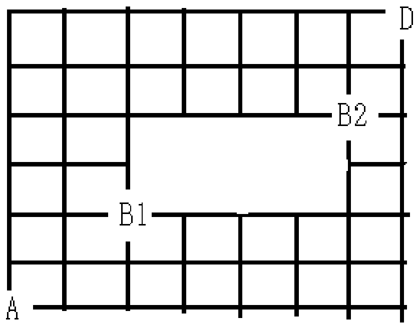
問６：(1)

図がこのような形であるとした時、全ての経路は

$\frac{13!}{6!7!}$＝1716通り

また、南西のＢをＢ1、北東のＢをＢ２とすると、両方を通る経路は

$\left(\frac{4!}{2!2!}\right)*\left(\frac{6!}{2!4!}\right)*\left(\frac{3!}{2!1!}\right)$＝270通り



元の図において、両方を通る経路は

$\left(\frac{4!}{2!2!}\right)*2*\left(\frac{3!}{2!1!}\right)$＝36通り

よって、元の図において全ての経路は

1716−(270−36)＝1476 通り

また、Ｂ1 だけを通る経路は

$\left(\frac{4!}{2!2!}\right)*\left(\frac{7!}{2!5!}+\frac{5!}{1!4!}\right)$−36＝120通り

Ｂ2 だけを通る経路は

$\left(\frac{8!}{2!6!}+\frac{6!}{2!4!}\right)*\left(\frac{3!}{2!1!}\right)-36=93$通り

ゆえに、求める経路は

1476－(36＋120＋93)＝1227 通りである。

(2)(1)より、Ｂを１回通る経路は

120＋93＝213 通り

また、Ｂ1、Ｂ2 の両方を通るのは 36 通りである。

全体が 1227 通りだから、それぞれの経路を通る確率は

$\frac{213}{1227}$、$\frac{36}{1227}$

よって、Ｂを通る回数の期待値は

$\left(\frac{213}{1227}\right)*1+\left(\frac{36}{1227}\right)*2=\frac{285}{1227}=\frac{95}{409}$である。

問７：　円の中心をＯ、それに内接する三角形との交点をＡ、Ｂ、Ｃとする。

(1)円Ｏに内接する△ＡＢＣにおいて

(i)ＡＣが中心Ｏを通る時、△ＯＢＣは二等辺三角形だから

∠ＯＢＣ＝∠ＯＣＢ

また、∠ＡＯＢは∠ＣＯＢの外角だから、

∠ＡＯＢ＝∠ＯＢＣ＋∠ＯＣＢ＝2∠ＯＣＢ

よって∠ＯＣＢ＝$\frac{1}{2}$∠ＡＯＢ

(ii)どの辺もＯを通らない時、ＣとＯを通る直線を引き、Ｃ以外の円との交点をＥとする。

△ＣＡＥ、△ＣＢＥはともにＯを通る三角形だから、(i)より

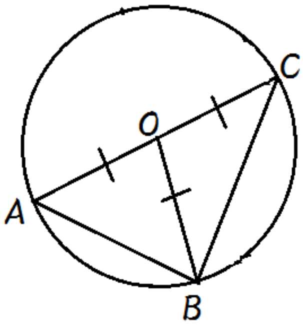
∠ＡＣＥ＝$\frac{1}{2}$∠ＡＯＥ、∠ＢＣＥ＝$\frac{1}{2}$∠ＢＯＥ

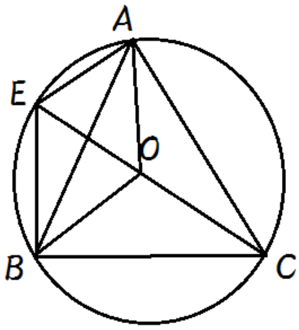
である。

∠ＡＣＢ＝∠ＡＣＥ＋∠ＢＣＥだから

∠ＡＣＢ＝$\frac{1}{2}$(∠ＡＯＥ＋∠ＢＯＥ)＝$\frac{1}{2}$∠ＡＯＢ

(i)、(ii)より、同じ弧の円周角は中心角の半分に等しい。





(1)参考

(2) 円の中心をＯ、それに内接する四角形との交点をＡ、Ｂ、Ｃ、Ｄとする。
∠ＢＡＤは∠ＢＯＤの円周角だから、
∠ＢＡＤ＝1/2∠ＢＯＤ
また、∠ＢＯＤの外角は 360°－∠ＢＯＤである。
この時、∠ＢＣＤは∠ＢＯＤの外角の円周角だから
∠ＢＣＤ＝1/2(360°－∠ＢＯＤ)＝180°－1/2∠ＢＯＤ
∠ＢＡＤと∠ＢＣＤは対角であり、
∠ＢＡＤ＋∠ＢＣＤ＝180°
ゆえに、円に内接する四角形の対角の和は 180° である。

問８：(1) ＰとＱの中心をそれぞれｐ、ｑとすると、
ｐ＋ｑ＝13＞12
よって、ＰとＱは異なる 2 点で交わる。

(2) ｐから接線に平行な直線を引き、ｑＳとの交点をＸとする。この時四角形ｐＸＳＲは長方形だから、
ｐＸ＝ＲＳである。
また、ＸＳ＝ｐＲ＝6 より、ｑＸ＝1
よって、ｐＸ＞0 だから、三平方の定理より

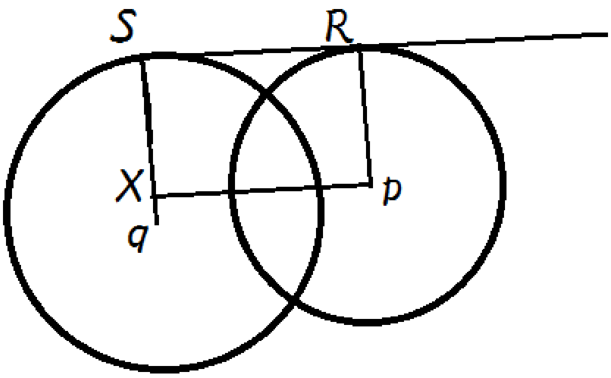
ｐＸ＝$\sqrt{144-1}=\sqrt{143}$

ゆえに、ＲＳ＝$\sqrt{143}$である。

(3)(2)より、ｐｑ＝ｒだから

ＲＳ＝$\sqrt{r^2-1}$

である。



問８参考